

LEÇON 9 : SYMÉTRIE ET TRANSLATION

A - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors d'une exposition d'art dans leur établissement, les élèves d'une classe de quatrième ont été impressionnés par un tableau décoratif représenté par la figure 1.

Figure 1

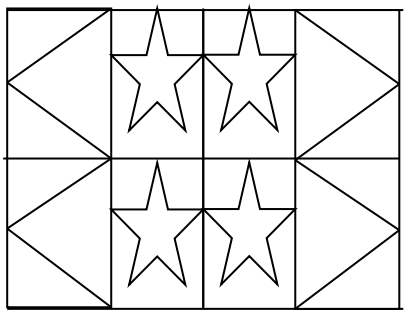
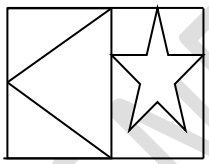


Figure 2



Pendant un cours de géométrie, le professeur de mathématique informe ses élèves que la figure 1 peut être construite à partir de la figure 2.

Etonnés, les élèves de la quatrième 5 décident de donner toutes les informations nécessaires pour construire la figure 1 à partir de la figure 2 et de la produire.

B - RÉSUMÉ DE COURS

I- APPLICATION DU PLAN DU PLAN DANS LE PLAN

1. Définition

On appelle **application du plan** dans le plan toute correspondance qui, à chaque point M du plan, associe un unique point M'du plan.



2. Notation et Vocabulaire

Si l'on désigne par *f* cette application, le point initial M et le point image M'.
L'écriture *f* : M ⟼ M' signifie *f*(M)= M'. On dit le point M'est**l'image** du point M par l'application *f*.
On appelle **tableau de correspondance** un tableau dans lequel on indique :
L'application du plan, f
Un (ou des) objet(s) géométrique(s), ici le point M,
Leur (s) image (s) par l'application, ici le point M'

Propriété du MENETFP

Ce document ne peut être vendu. Tout contrevenant s'expose aux rigueurs de la loi



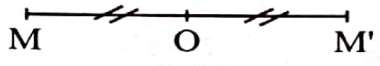
Objet	Image
M	M’

II- EXEMPLES D’APPLICATIONS DU PLAN

1. Symétrie centrale

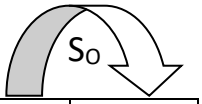
Définition -Notation

O est un point du plan.
La symétrie centrale de centre O est l’application du plan dans le plan qui, à tout point M du plan, associe le point M’ symétrique du point M par rapport au point O.
La symétrie centrale de centre O se note: S_O
M’ = S_O (M) signifie M’ est le symétrique de M par rapport à O.



Remarque

- O = S_O (O)
- Si M ≠ O, alors M’ = S_O (M) signifie que le point O est le milieu du segment [MM’]



Le tableau de correspondance

Objet	Image
M	M’
M’	M
O	O

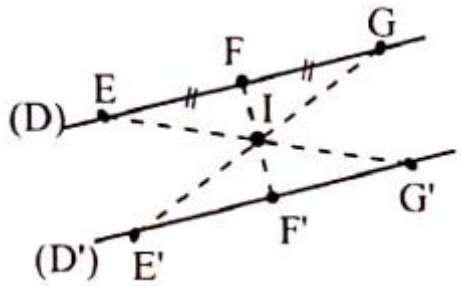
Vocabulaire

La symétrie centrale de centre O se dit aussi symétrie de centre O.

Propriétés

Par une symétrie centrale :

- Une droite a pour image une droite qui lui est parallèle.
- Des points alignés ont pour images des points alignés.
- Un segment a pour image un segment de même longueur.
- Le milieu d’un segment a pour image le milieu de l’image de ce segment.

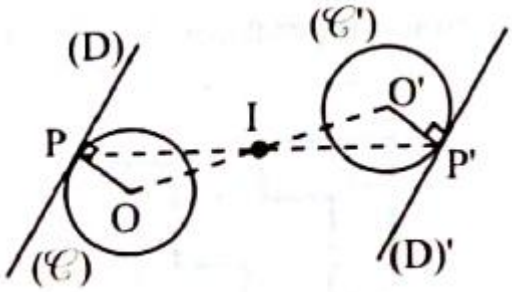


(D) et (D’) sont parallèles.

Propriété du MENETFP

Ce document ne peut être vendu. Tout contrevenant s’expose aux rigueurs de la loi

- Un cercle a pour image un cercle de même rayon



- Un angle a pour image un angle de même mesure
- Deux droites parallèles ont pour image deux droites parallèles
- Deux droites perpendiculaires ont pour image deux droites perpendiculaires

2. Symétrie orthogonale

Définition-Notation

(D) est une droite du plan.

La symétrie orthogonale par rapport à (D) est l'application du plan dans le plan qui, à tout point M du plan, associe son symétrique par rapport à (D).

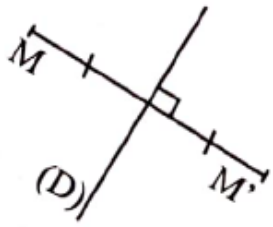
La symétrie orthogonale d'axe (D) se note : $S_{(D)}$.

M' = $S_{(D)}$ (M) signifie M' est le symétrique de M par rapport à (D).

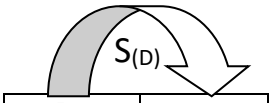
(D) est appelée l'axe de la symétrie orthogonale.

Remarque

- Si M appartient à (D), alors M = $S_{(D)}$ (M)
- Si M n'appartient pas à (D), alors M' = $S_{(D)}$ (M) signifie que (D) est la médiatrice du segment [MM'].



Le tableau de correspondance



Objet	Image
M	M'
M'	M
O	O

Vocabulaire

La symétrie orthogonale par rapport à la droite (D)s'appelle aussi symétrie d'axe (D) ou encore symétrie axiale d'axe (D).

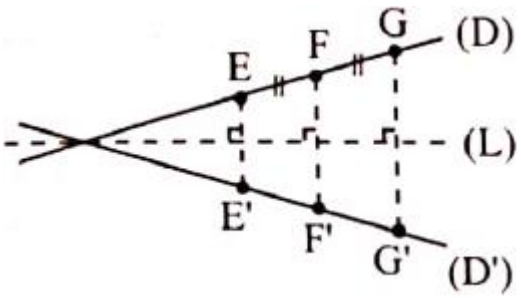
Propriétés

Par une symétrie orthogonale :

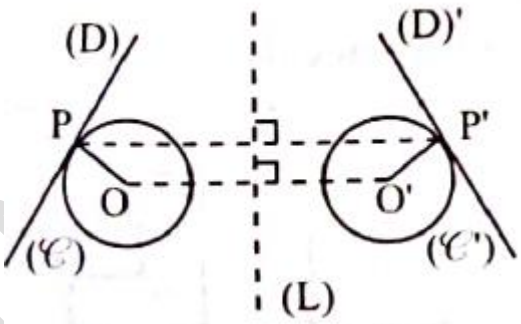
Propriété du MENETFP

Ce document ne peut être vendu. Tout contrevenant s'expose aux rigueurs de la loi

- Une droite a pour image une droite.
- Des points alignés ont pour images des points alignés.
- Un segment a pour image un segment de même longueur.
- Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.



- Un cercle a pour image un cercle de même rayon



- Un angle a pour image un angle de même mesure
- Deux droites parallèles ont pour image deux droites parallèles
- Deux droites perpendiculaires ont pour image deux droites perpendiculaires

3. TRANSLATION

Définition et notation

A et B sont deux points du plan.

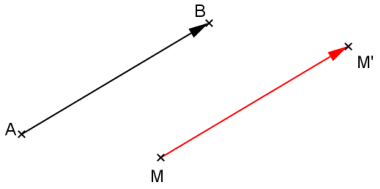
On appelle **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** l'application du plan dans le plan, qui à tout point M associe le point M' tel que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ soit égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ **.**

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée : $\mathbf{t}_{\overrightarrow{AB}}$

$\overrightarrow{AB}$ est appelé le vecteur de la translation.

Remarque

M'= $t_{\overrightarrow{AB}}$ (M') signifie que $\overrightarrow{MM'}$= $\overrightarrow{AB}$



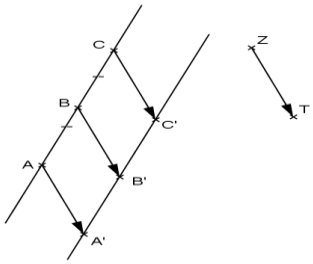
Propriété du CTFP

Ce document ne peut être vendu. Tout contrevenant s'expose aux rigueurs de la loi

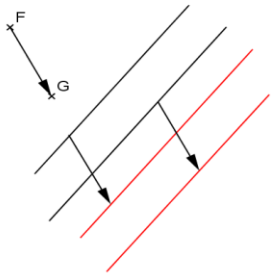
Propriétés

Par une translation :

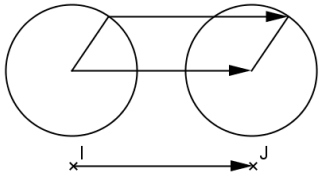
- Des points alignés ont pour images des points alignés.
- Une droite a pour image une droite de même direction.
- Un segment a pour image un segment de même longueur.
- Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.



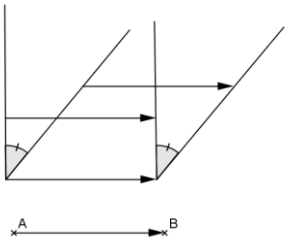
- Deux droites parallèles ont pour image deux droites parallèles



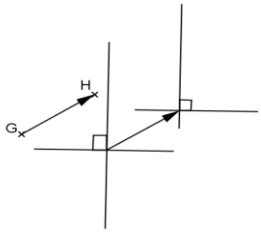
- Un cercle a pour image un cercle de même rayon



- Un angle a pour image un angle de même mesure



- Deux droites perpendiculaires ont pour image deux droites perpendiculaires.



Propriété du MENETFP

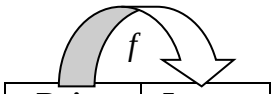
Ce document ne peut être vendu. Tout contrevenant s'expose aux rigueurs de la loi

C -EXERCICES

C_1 EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

Voici un tableau de correspondance.
Guehi affirme que *f* ne peut pas être une application du plan. Explique pourquoi.



Point	Image
R	S'
U	M
R	V
T	P

Exercice 2

Pour chaque affirmation indique la bonne réponse parmi la lettre **a, b ou c.**

1. ABCD est un parallélogramme de centre O.
   - **a.** $S_O(A) = C$
   - **b.** $S_O(B) = C$
   - **c.** $S_O(C) = D$
2. ABCD est un parallélogramme
   - **a.** $t_{\overrightarrow{AD}}(B) = D$
   - **b.** $t_{\overrightarrow{BC}}(A) = D$
   - **c.** $t_{\overrightarrow{BC}}(D) = A$
3. PQRS est un carré de centre I.
   - **a.** $S_{(SQ)}(P) = I$
   - **b.** $S_{(SQ)}(P) = Q$
   - **c.** $S_{(SQ)}(P) = R$
4. PQRS est un carré de centre I.
   - **a.** $S_{(PR)}(SR) = (SQ)$
   - **b.** $S_{(PR)}(SR) = (PQ)$
   - **c.** $S_{(PR)}(SR) = (RQ)$

Exercices de renforcement

Exercice3

1.
   a) Sur une feuille non quadrillée, place deux points A et B tels que AB= 6cm.
   b) Place un point M tel que M n'appartienne pas à la droite (AB).
2. En utilisant uniquement une règle non graduée et un compas :
   a) Construis le point M_1 image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
   b) Construis le point M_2 image de M par la symétrie centrale de centre O, milieu du segment [AB]
   c) Construis le point M_3 image de M par la symétrie orthogonale d'axe (AB).

Propriété du MENETFP

Ce document ne peut être vendu. Tout contrevenant s'expose aux rigueurs de la loi

Exercices d'approfondissement

Exercice 4

1) Construis un triangle rectangle en B. I est le milieu du segment [AC] et B' le point du plan tel que B'= S_I (B).
   a) Démontre que les droites (B'C) et (AB') sont perpendiculaires.
   b) Démontre que le quadrilatère BCB'A est un rectangle.
2) On note A'=$t_{\overrightarrow{CB}}$ (A) et I'= $t_{\overrightarrow{BC}}$ (I).
   a) Dresse le tableau de correspondance relatif à ces informations
   b) Justifie que I' est le milieu de [BA']
   c) Démontre que les points A, A' et B' sont alignés.
3) K est le milieu de [AB]
   Justifie que S_K(C)=A'

C_4 -SITUATIONS D'EVALUATION

Koffi, un élève de 4ème, a construit sur une feuille un polygone EFGHK et son image par une symétrie centrale. Malheureusement, il ne retrouve plus sa feuille mais il avait noté dans son cahier de recherche le tableau de correspondance des points et leurs images.

Points	E	F	H	G	A	K
images	M	N	B	O	A	T

Il n'a pas le temps de refaire la figure. Il cherche à obtenir des informations à partir de ce tableau.
Koffi te sollicite pour l'aider.

1. Détermine le centre de la symétrie
2. Koffi se souvient que :
   - EFG est un triangle isocèle en F ;
   - (GH) et (FG) sont perpendiculaires ;
   - KE = 3,5 et ON = 6 cm

a) Détermine la longueur de chacun des segments [MT] et [GF].
b) Détermine un autre triangle isocèle de la figure
c) Justifie que les droites (OB) et (ON) sont perpendiculaires.

Propriété du MENETFP

Ce document ne peut être vendu. Tout contrevenant s'expose aux rigueurs de la loi